Середній рівень

1. Знайти координати вектора $\vec{b}$, який колінеарний вектору $\vec{a}=(-1;2)$, якщо його довжина $|\vec{b}|=\sqrt{10}$.
2. Знайти $(3\vec{a}-4\vec{b})(\vec{a}+7\vec{b})$, якщо $\vec{a}=(-1;2), \vec{b}=(4;-3)$.
3. Знайти $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$, якщо $\vec{a}=(3;10), \vec{b}=(6;-4)$.
4. Знайти $\left(\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\left(\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}\right)$, якщо $\vec{a}=(-3;4), \vec{b}=(1;-1)$.
5. Знайти довжину вектора $5\vec{a}-\vec{b}$, якщо $\vec{a}(3;-1)$ і $\vec{b}(-2;4)$.
6. Знайти довжину вектора $\vec{a}+7\vec{b}$, якщо $\vec{a}(8;7)$ і $\vec{b}(-5;1)$.
7. Знайти довжину вектора $4\vec{a}-3\vec{b}$, якщо $\vec{a}(-2;-9)$ і $\vec{b}(-1;6)$.
8. Знайти довжину вектора $3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$, якщо $A(3,2)$, $B(3,9)$, $C(0,3)$.
9. Знайти довжину вектора $7\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{BC}$, якщо $A(1,9)$, $B(-3,-2)$, $C(6,1)$.
10. Знайти довжину вектора $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$, якщо $A(0,-2)$, $B(-3,5)$, $C(7,11)$.
11. Серед заданих векторів визначити пару колінеарних і пару ортогональних векторів: $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=6\vec{i}-9\vec{j}$, $\vec{c}=3\vec{i}+13\vec{j}$, $\vec{d}=-7\vec{i}-9\vec{j}$, $\vec{e}=15\vec{i}+10\vec{j}$, $\vec{f}=-10\vec{i}+15\vec{j}$.
12. Серед заданих векторів визначити пару колінеарних і пару ортогональних векторів: $\vec{a}=12\vec{i}+63\vec{j}$, $\vec{b}=4\vec{i}-21\vec{j}$, $\vec{c}=16\vec{i}+84\vec{j}$, $\vec{d}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{e}=63\vec{i}+12\vec{j}$, $\vec{f}=-10\vec{i}+16\vec{j}$.
13. Серед заданих векторів визначити пару колінеарних і пару ортогональних векторів: $\vec{a}(5;4)$, $\vec{b}(2;-8)$, $\vec{c}(3;8)$, $\vec{d}(28;7)$, $\vec{e}(14;21)$, $\vec{f}(-10;-15)$.
14. Серед заданих векторів визначити пару колінеарних і пару ортогональних векторів: $\vec{a}(-91;42)$, $\vec{b}(13;7)$, $\vec{c}(26;-12)$, $\vec{d}(13;6)$, $\vec{e}(6;13)$, $\vec{f}(7;13)$.
15. Знайти значення коефіцієнта β, при якому вектори $\vec{a}=\beta\vec{i}+8\vec{j}$ і $\vec{b}=4\vec{i}+32\vec{j}$ будуть колінеарні, будуть ортогональні.
16. Дано координати точок $A(-1;6), B(4;4), C(2;-3), D(-8;-2)$. Чи колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$?
17. Дано точки $A(3;9), B(11;-1), C(-2;-8), D(-10;2)$. Якою геометричною фігурою є чотирикутник $ABCD$?
18. Знайти вектор $\vec{a}$, якщо $|\vec{a}|=2$ і відомо, що він складає з додатними напрямами осей координат рівні гострі кути.
19. Знайти вектор $\vec{a}$, якщо $|\vec{a}|=3$ і відомо, що він складає з додатними напрямами осей координат рівні тупі кути.

20. Знайти вектор $\vec{b}$, якщо $|\vec{b}|=2$ і відомо, що кут з додатним напрямом вісі *OX* вдвічі більший за кут з додатним напрямом вісі *OY*.
21. Знайти вектор $\vec{b}$, якщо $|\vec{b}|=8$ і відомо, що кут з додатним напрямом вісі *OX* вдвічі менший за кут з додатним напрямом вісі *OY*.
22. Знайти $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)$ якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, а кут між ними складає 60^0.
23. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, причому $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. Знайти $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$.
24. Знайти кут між векторами $3\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{a}-5\vec{b}$, якщо $\vec{a}(6,5)$ та $\vec{b}(4,8)$.
25. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$ і вектор $2\vec{a}+\vec{b}$ перпендикулярний вектору $\vec{a}-3\vec{b}$.
26. Знайти координати вектора $\vec{b}$, який колінеарний вектору $\vec{a}(2;-3)$, якщо скалярний добуток цих векторів дорівнює -26.
27. Довжини ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні. Знайдіть кут між цими векторами, якщо відомо, що вектори $\vec{a}+2\vec{b}$ і $5\vec{a}-4\vec{b}$ перпендикулярні.
28. Визначити тип трикутника (гострокутний, прямокутний або тупокутний), якщо його вершини знаходяться в точках $A(1;4)$, $B(4;7)$ і $C(8;3)$.
29. Визначити тип трикутника (гострокутний, прямокутний або тупокутний), якщо його вершини знаходяться в точках $A(-3;-1)$, $B(2;2)$ і $C(0;-7)$.
30. Визначити тип трикутника (гострокутний, прямокутний або тупокутний), якщо його вершини знаходяться в точках $A(5;1)$, $B(-1;1)$ і $C(-2;-7)$.

Достатній рівень

31. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнюють 20 см і 30 см відповідно. Знайдіть бісектрису кута при основі трикутника.
32. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 20 см, а висота, проведена до бічної сторони, – 24 см. Знайдіть площу цього трикутника.
33. На сторонах *AB* і *AC* трикутника *ABC* позначено точки *M* і *K* відповідно, *MB* = 6 см, *AK* = 4 см, *AC* = 18 см, *AM* = 10 см. Знайдіть площу чотирикутника *MBCK*, якщо площа трикутника *MAK* дорівнює 15 см^2.
34. У прямокутному трикутнику *ABC* до гіпотенузи *AB* проведено висоту *CM*. Площа трикутника *ACM* дорівнює 6 см^2, а площа трикутника *BCM* дорівнює 54 см^2. Знайдіть гіпотенузу трикутника *ABC*.
35. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть відстань від вершини меншого гострого кута трикутника до центра вписаного кола.

36. Бічна сторона рівнобедреного трикутника точкою дотику вписаного кола ділиться у відношенні 9:8, відраховуючи від вершини трикутника. Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 16 см.
37. Радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, дорівнює 12 см, а відстань від центра цього кола до вершини трикутника, що лежить проти основи, 20 см. Знайдіть периметр даного трикутника.
38. Одна з сторін трикутника дорівнює 30 см, а друга ділиться точкою дотику вписаного кола на відрізки завдовжки 12 см і 14 см, відраховуючи від кінця невідомої сторони. Знайдіть радіус вписаного кола.
39. Висота ромба дорівнює 12 см, а менша діагональ 15 см. Знайдіть площу ромба.
40. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 16 см і 30 см, а бічні сторони 13 см і 15 см.
41. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а висота 8 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даної трапеції.
42. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 18 см, а діагональ 13 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даної трапеції.
43. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 5 см і 13 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.
44. Основи трапеції дорівнюють 2 см і 7 см, а її діагоналі – 10 см і 17 см. Знайдіть площу трапеції.
45. Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні і дорівнюють 12 см і 16 см. Знайдіть висоту трапеції.
46. Діагоналі рівнобічної трапеції є бісектрисами її гострих кутів і точкою перетину діляться у відношенні 5:13. Знайдіть площу трапеції, якщо її висота дорівнює 90 см.
47. Точка перетину бісектрис гострих кутів при основі трапеції належить іншій основі. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють 17 см і 25 см, а висота 15 см.
48. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на її більшій основі. Знайдіть радіус цього кола, якщо діагональ трапеції дорівнює 20 см, а її висота 12 см.
49. У рівнобічну трапецію вписано коло. Одна з бічних сторін точкою дотику ділиться на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть площу трапеції.
50. Площа рівнобічної трапеції дорівнює $3\sqrt{2}$ см^2, а гострий кут 45^0. Знайдіть висоту трапеції, якщо відомо, що в неї можна вписати коло.
51. Радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію, дорівнює 6 см, а одна з основ на 10 см більша за іншу. Знайдіть площу трапеції.
52. Центр кола, вписаного у прямокутну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони на 15 см і 20 см. Обчисліть площу трапеції.
53. Більша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює $12\sqrt{2}$ см, а гострий кут 45^0. Знайдіть площу цієї трапеції, якщо відомо, що в неї можна вписати коло.

54. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ ділить його сторону BC на відрізки BM і MC довжиною 10 см і 14 см відповідно. Знайти довжину меншого з відрізків, на які бісектриса ділить діагональ прямокутника.
55. Діагональ рівнобічної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки довжиною 15 см і 12 см, а бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.
56. Перпендикуляр, опущений з точки кола на його діаметр, ділить діаметр на два відрізки, один із яких на 27 см більший за інший. Знайдіть довжину кола, якщо довжина перпендикуляра 18 см.
57. З точки A до кола проведено дві дотичні, довжини яких дорівнюють по 12 см, а відстань між точками дотику 14,4 см. Знайдіть радіус кола.
58. Точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу прямокутного трикутника на два відрізки, один з яких на 14 см більший за інший. Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 4 см.
59. У колі по різні сторони від його центра проведено дві паралельні хорди завдовжки 16 см і 32 см, відстань між хордами – 16 см. Знайдіть радіус кола.
60. У кут, величина якого становить 60°, вписано два кола, які зовнішньо дотикаються одне до одного. Знайдіть радіус більшого з них, якщо радіус меншого дорівнює 6 см.

Високий рівень

61. Через кінці дуги кола, яка має 120^0, проведено дотичні, і в фігуру, обмежену цими дотичними і даною дугою, вписано коло. Довести, що довжина вписаного кола дорівнює довжині початкової дуги.
62. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b, бічна сторона її c, а діагональ дорівнює d. Довести, що $d^2=ab+c^2$.
63. Дано правильний трикутник ABC. Точка K ділить сторону AC у відношенні 2:1, а точка M – сторону AB у відношенні 1:2 (починаючи в обох випадках від вершини A). Довести, що довжина відрізка KM дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника ABC.
64. Діаметр півкруга розділено на дві довільні частини і на кожній з них побудовано як на діаметрі півкола (всередині даного півкруга). Довести, що площа, яка міститься між трьома півколами, дорівнює площі круга, діаметр якого дорівнює перпендикуляру, проведеному до діаметра півкруга в точці поділу до перетину з колом.
65. Довести, що в паралелограмі $ABCD$ відстані від будь-якої точки діагоналі AC до прямих BC і CD) обернено пропорційні цим сторонам.
66. Довести, що відношення периметра трикутника до однієї із його сторін дорівнює відношенню висоти, проведеної на цю сторону, до радіуса вписаного кола.
67. У рівнобічну трапецію вписано круг. Довести, що відношення площі круга до площі трапеції дорівнює відношенню довжини кола до периметра трапеції.

68. Дано рівнобедрений трикутник з основою a, і бічною стороною b. Довести, що центр вписаного кола ділить бісектрису кута при основі у відношенні $(a+b):b$, починаючи від вершини кута.
69. У рівнобедреному трикутнику основа і бічна сторона рівні a і b. Кут при вершині дорівнює 20^0. Довести, що $a^3+b^3=3ab^2$.
70. В трикутнику відношення тангенсів двох кутів дорівнює відношенню квадратів синусів цих кутів. Довести, що трикутник рівнобедрений чи прямокутний.
71. В трикутнику $\frac{a}{\cos\gamma+2\cos\beta}=\frac{b}{\cos\gamma+2\cos\alpha}$. Довести, що трикутник рівнобедрений чи прямокутний.
72. Довести, що якщо в трикутнику відношення суми синусів двох кутів до суми їх косинусів дорівнює синусу третього кута, то трикутник прямокутний.
73. Довести, що для будь-якого прямокутного трикутника $0{,}4<\frac{r}{h}<0{,}5$, де r - радіус вписаного кола, h - висота, проведена до гіпотенузи.
74. Довести, що в довільному трикутнику відношення радіуса вписаного кола до радіусу описаного не перевищує 0,5.
75. Довести, що у будь-якому трикутнику бісектриса лежить між медіаною і висотою, проведеної з тієї ж вершини.
76. Довести, що у довільному чотирикутнику сума квадратів усіх сторін не менше суми квадратів його діагоналей.
77. Довести, що сума кутів при меншій основі трапеції більше за суму кутів при більшій основі.
78. K,L,M – основи висот гострокутного трикутника $\triangle ABC$. Відомо що трикутники $\triangle KLM$ і $\triangle ABC$ подібні. Довести, що $\triangle ABC$ рівносторонній.
79. Довести, що для внутрішніх кутів трикутника α,β,γ виконується рівність: $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.
80. Довжини сторін трикутника утворюють геометричну прогресію. Довести, що даний трикутник і трикутник утворений з його висот подібні.